Corso di Laurea in Fisica, Analisi (Canale D-K) 20-21
Prof. Galise
Esercitazione 3

Esercizio 1 Calcolare, se esiste, il limite delle seguenti successioni

$$\frac{n\arctan n}{\sqrt{n}}, \qquad \frac{\cos(n)}{n!}+\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right), \qquad (n^2+n+1)^{\frac{1}{2}}-(n^2+2n+3)^{\frac{1}{2}}, \qquad (-1)^n+(-1)^{n+1}, \qquad \cos(\pi n)+(-1)^n$$

Per quelle non convergenti individuare i limiti delle sottosuccessioni convergenti.

Esercizio 2 Calcolare, se esistono, i limiti delle seguenti successioni

$$\frac{2^{3n}+49^{n/2}}{1+2^n-32^{\frac{3}{5}n}}, \quad \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n, \quad \left(1+\frac{2}{n^n}\right)^{n!}$$

Esercizio 3 Sia a_n una successione limitata di numeri reali, con $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dire se esistono i seguenti limiti, motivando le risposte con esempi e controesempi:

$$\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_n), \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{\cos(\sin(a_{n-2}))}{n+1}, \qquad \lim_{n\to+\infty} na_n, \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{na_n+1}{n^2+2}, \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{a_n}.$$

Esercizio 4 Dati $A, B \in \mathbb{R}$, sia $a_n := n^2 + A\,n + B$. Per quali scelte di A e B, la successione a_n è monotona? Per quali scelte di A e B, la successione a_n è definitivamente monotòna?

Esercizio 5 Sia a_n la successione che verifica:

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = 2\,a_n + 1.$$

Si dice che a_n è definita per ricorrenza.
i. Dimostrare per induzione che la successione è a termini positivi ed è strettamente crescente;
ii. dimostrare che la successione a_n è divergente;
iii. determinare la forma esplicita di a_n.

Esercizio 6 Sia a_n la successione definita per ricorrenza nel seguente modo:

$$a_0 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right).$$

i. dimostrare che la successione è a termini positivi;
ii. mostrare che la successione è monotona decrescente e dedurne l'esistenza del limite;
iii. provare che il limite $\ell \leq 4$ e calcolarlo.

Esercizio 7 Data una successione a_n provare che se la sottosuccessione a indici pari a_{2n} e quella a indici dispari a_{2n+1} convergono a ℓ allora tutta la successione converge a ℓ.

Dedurne che la successione

$$\frac{(-4)^n+3}{(3^n+n)^2}$$

è convergente.

Esercizio 8 Dire perché esiste, e calcolarlo, il limite delle seguenti successioni

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}, \qquad b_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}.$$

Per determinare il limite di b_n è utile osservare che $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ (la somma che definisce b_n si dice telescopica).

Esercizio 9 Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione;

1. $\lim_{n\to+\infty} a_n = 6 \Leftrightarrow \forall\, 0 < \varepsilon < 2, \exists N_\varepsilon \geq 16 : n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - 6| \leq 5\varepsilon.$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. $\exists N \in \mathbb{N} : \forall\varepsilon > 0,\ |a_n - 1| \leq \varepsilon\ \forall n > N \Leftrightarrow \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente costante. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. $\exists N \in \mathbb{N}, \exists\varepsilon > 0 :\ |a_n - 5| \leq \varepsilon\ \forall n > N \Leftrightarrow \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non è convergente $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} |na_n| = +\infty$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 10 Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $a_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Allora:

1. $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0.$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{|a_n|}}{|a_n|} + ne^{a_n} = +\infty.$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = 0$ per ogni successione $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente nulla. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{e^n} = 0.$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 11 Per ogni successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $a_{n+1} \geq a_n - \frac{1}{2^n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

1. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione monotona. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata inferiormente. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 12 Per ogni coppia di successioni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monotone crescenti si ha:

1. $\{a_n - b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione monotona. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, allora $\{a_n - b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non è oscillante. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. Se $a_3 = 4$ e $b_4 = 3$, allora $\{a_n b_n\}$ è convergente o divergente a $+\infty$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. $\{a_n - b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge se e solo se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergono. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$